

$$[1+(n-1)\sqrt{3}]^2 = [1+\sqrt{3}n+1+(n-1)\sqrt{3}] \cdot [1+\sqrt{3}n-1-(n-1)\sqrt{3}] = [2+(2n-1)\sqrt{3}] \cdot \sqrt{3} = 3(2n-1)+2\sqrt{3} = 6n-3+2\sqrt{3}.$$

(3) 当 $a=1, b=3$ 时, $T=t_1+t_2+t_3+\cdots+t_{50}=S_2-S_1+S_3-S_2+S_4-S_3+\cdots+S_{51}-S_{50}=S_{51}-S_1=(1+50\sqrt{3})^2-1=7\,500+100\sqrt{3}.$

第十六章 轴对称和中心对称

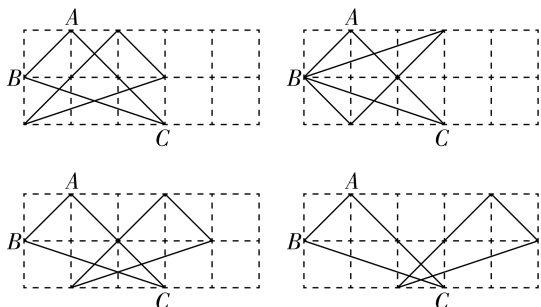
16.1 轴对称

刷基础

1. **B** 【解析】A 选项, 不是轴对称图形, 故本选项不符合题意; B 选项, 是轴对称图形, 故本选项符合题意; C 选项, 不是轴对称图形, 故本选项不符合题意; D 选项, 不是轴对称图形, 故本选项不符合题意. 故选 B.

2. **C** 【解析】A 选项, 有无数条对称轴; B 选项, 有 2 条对称轴; C 选项, 有 1 条对称轴; D 选项, 有 3 条对称轴. 故选 C.

3. **D** 【解析】如图所示, 在网格中与 $\triangle ABC$ 成轴对称的格点三角形一共有 4 个, 故选 D.



4. **B6395** 【解析】在平面镜中的像与现实中的事物恰好顺序颠倒, 且关于镜面成轴对称, \therefore 该汽车的车牌号为 B6395. 故答案为 B6395.

5. **A** 【解析】根据“成轴对称的两个图形是全等图形, 对应点的连线被对称轴垂直平分”可知, $\triangle ABC \cong \triangle ADE$, 直线 l 垂直平分线段 DB , 所以 $\angle ACB = \angle AED$. 因为如果两个图形成轴对称, 那么这两个图形的对应线段或其延长线在同一条直线上或相交, 其交点一定在对称轴上, 所以 BC 与 DE 的延长线的交点一定落在直线 l 上. 故错误的有 0 个.

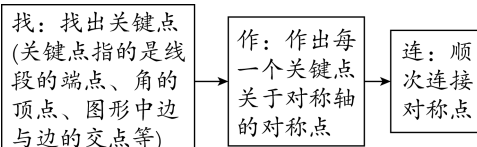
6. **2** 【解析】题图中阴影部分的面积为正方形 $ABCD$ 面积的一半, 即 $\frac{1}{2} \times 2^2 = 2$.

7. 【解】(1) $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 关于直线 MN 对称, $ED=4\text{ cm}, FC=1\text{ cm}, \therefore \triangle ABC \cong \triangle ADE, \therefore BC=ED=4\text{ cm}, \therefore BF=BC-FC=3\text{ cm}.$
(2) $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 关于直线 MN 对称, $\angle BAC=76^\circ, \angle EAC=58^\circ, \therefore \triangle ABC \cong \triangle ADE, \therefore \angle EAD = \angle BAC = 76^\circ, \therefore \angle CAD = \angle EAD - \angle EAC = 76^\circ - 58^\circ = 18^\circ.$

归纳总结

此类题可根据轴对称图形的定义“如果一个图形沿某条直线对折后, 直线两旁的部分能够完全重合, 那么这个图形就叫作轴对称图形”判断正确图形.

8. 思路分析 | 画已知图形的轴对称图形的步骤



【解】如图所示.

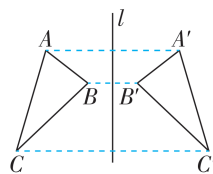


图 (1)

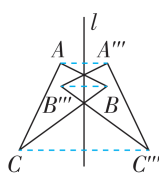
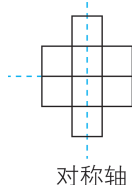


图 (2)

刷提升

1. **A** 【解析】A 选项, 放入①的位置的图形为

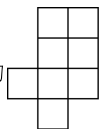


对称轴

, 是轴对称图形, 并且有

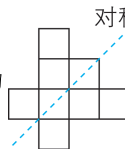
两条对称轴, 故此选项符合题意; B 选项, 放入

②的位置的图形为



, 不是轴对称图形, 故此选项不符合题意; C 选项, 放入③的位置

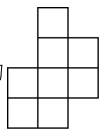
的图形为



对称轴

, 是轴对称图形, 但只

有一条对称轴, 故此选项不符合题意; D 选项, 放入④的位置的图形为



, 不是轴对

称图形, 故此选项不符合题意. 故选 A.

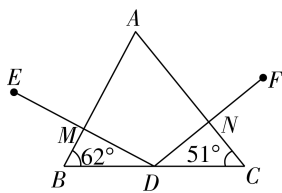
2. **C** 【解析】先由轴对称的定义, 判断每条虚线两侧的图形是否成轴对称, C, D 两项满足, 但 D 选项的基本图形的 \triangle 位置与题意不符, 故选 C.

3. **A** 【解析】如图, 设 AB 与 ED 交于点 M, AC

技巧总结

如果两个图形关于某一条直线成轴对称, 那么这两个图形是全等图形.

与 DF 交于点 N .
 \therefore 分别以 AB, AC 所在直线为对称轴, 画出点 D 的对称点 $E, F, \therefore AB \perp ED, AC \perp$



$DF, \therefore \angle BMD = \angle DNC = 90^\circ$. 在直角三角形 BDM 中, $\angle ABD = 62^\circ, \therefore \angle BDM = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$. 在直角三角形 CDN 中, $\angle ACD = 51^\circ, \therefore \angle CDN = 90^\circ - \angle ACD = 90^\circ - 51^\circ = 39^\circ, \therefore \angle EDF = 180^\circ - \angle BDM - \angle CDN = 180^\circ - 28^\circ - 39^\circ = 113^\circ$. 故选 A.

4. 9.6

思路分析 | 利用轴对称的性质解决最值问题

连接 CP . 点 P 关于直线 AC, BC 对称的点分别为 P_1, P_2
 $CP_1 = CP = CP_2; P_1, C, P_2$ 三点共线
 $P_1P_2 = 2CP$, 求 CP 的最小值
 由垂线段最短, 转化为求 AB 边上的高
 利用 $S_{\text{直角三角形}ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CP = \frac{1}{2}AC \cdot BC$,
 且 $AB = 10, AC = 8, BC = 6$

【解析】如图, 连接 CP . \therefore 点 P 关于直线 AC, BC 对称的点分别为 $P_1, P_2, \therefore P_1C = PC = P_2C, \angle P_1CA = \angle PCA, \angle P_2CB = \angle PCB, \therefore \angle P_1CP_2 = 2\angle ACB = 180^\circ, \therefore P_1, C, P_2$ 三点共线, $\therefore P_1P_2 = 2CP$. 当 $CP \perp AB$ 时, CP 的长最小, 此时线段 P_1P_2 的长最小. $\therefore \angle ACB = 90^\circ, BC = 6, AC = 8, AB = 10, \therefore CP = \frac{AC \times BC}{AB} = 4.8, \therefore$ 线段 P_1P_2 的长的最小值是 9.6.

刷素养

5. 【解】(1) $\therefore \angle FEG = 110^\circ, \therefore \angle AEF + \angle DEG = 180^\circ - \angle FEG = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. 由折叠的性质得 $\angle AEF = \angle A'EF, \angle DEG = \angle D'EG, \therefore \angle AEF + \angle DEG = \angle A'EF + \angle D'EG = 70^\circ, \therefore \angle A'ED' = \angle FEG - (\angle A'EF + \angle D'EG) = 110^\circ - 70^\circ = 40^\circ$.

(2) 题图(2)和题图(3)中 $\angle FEG$ 的度数分别为 $90^\circ, 60^\circ$. 题图(2)中, 由折叠的性质得 $\angle AEF = \angle A'EF, \angle DEG = \angle D'EG, \therefore \angle AEF + \angle DEG = \angle A'EF + \angle D'EG. \therefore \angle AEF + \angle DEG + \angle A'EF + \angle D'EG = 180^\circ, \therefore 2(\angle A'EF + \angle D'EG) = 180^\circ, \therefore \angle A'EF + \angle D'EG = 90^\circ,$

思路分析

(2) 题图(2)中, 根据折叠的性质得 $\angle AEF = \angle A'EF, \angle DEG = \angle D'EG$, 从而可得 $2(\angle A'EF + \angle D'EG) = 180^\circ$, 即可求解 $\angle FEG$ 的度数; 题图(3)中, 根据折叠的性质可得 $\angle AEF = \angle A'ED' = \angle DEG$, 再由 $\angle AEF + \angle A'ED' + \angle DEG = 180^\circ$, 即可求解 $\angle FEG$ 的度数.

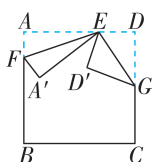
(3) 分两种情况: ①当 $\triangle A'EF$ 和 $\triangle D'EG$ 不重叠时; ②当 $\triangle A'EF$ 和 $\triangle D'EG$ 重叠时, 分别进行计算即可.

$\therefore \angle FEG = \angle A'EF + \angle D'EG = 90^\circ$. 题图(3)中, 由折叠的性质得 $\angle AEF = \angle A'ED', \angle DEG = \angle A'ED', \therefore \angle AEF = \angle A'ED' = \angle DEG. \therefore \angle AEF + \angle A'ED' + \angle DEG = 180^\circ, \therefore \angle A'ED' = 60^\circ$, 即 $\angle FEG = 60^\circ$.

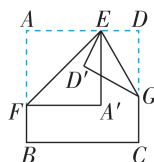
(3) 分两种情况: ①当 $\triangle A'EF$ 与 $\triangle D'EG$ 不重叠时, 如图(1)所示, 由折叠的性质得 $\angle AEF = \angle A'EF, \angle DEG = \angle D'EG, \therefore \angle AEF + \angle DEG = \angle A'EF + \angle D'EG. \therefore \angle AEF + \angle DEG + \angle A'EF + \angle D'EG + \angle A'ED' = 180^\circ, \therefore 2(\angle A'EF + \angle D'EG) + n^\circ = 180^\circ, \therefore \angle A'EF + \angle D'EG = \frac{180^\circ - n^\circ}{2}, \therefore \angle FEG = \angle A'EF + \angle D'EG + \angle A'ED' = \frac{180^\circ - n^\circ}{2} + n^\circ = \frac{180^\circ + n^\circ}{2}$.

②当 $\triangle A'EF$ 与 $\triangle D'EG$ 重叠时, 如图(2)所示, 由折叠的性质得 $\angle AEF = \angle A'EF, \angle DEG = \angle D'EG, \therefore \angle AEF + \angle DEG = \angle A'EF + \angle D'EG = \angle FEG + \angle A'ED'$. 又 $\therefore \angle AEF + \angle DEG + \angle FEG = 180^\circ, \therefore \angle FEG + \angle A'ED' + \angle FEG = 180^\circ, \therefore 2\angle FEG = 180^\circ - \angle A'ED' = 180^\circ - n^\circ, \therefore \angle FEG = \frac{180^\circ - n^\circ}{2}$.

综上所述, $\angle FEG$ 的度数为 $\frac{180^\circ + n^\circ}{2}$ 或 $\frac{180^\circ - n^\circ}{2}$.



图(1)



图(2)

16.2 线段的垂直平分线

课时1 线段垂直平分线的性质定理



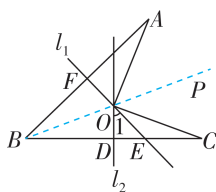
刷基础

关键点拨

利用线段垂直平分线的性质进行线段的转化是解题关键.

1. B 【解析】 $\therefore DE$ 是 AC 的垂直平分线, $\therefore DA = DC. \therefore AB = 4, BC = 7, \therefore \triangle ABD$ 的周长为 $AB + BD + AD = AB + BD + CD = AB + BC = 4 + 7 = 11$, 故选 B.

2. 【解】如图, 连接 BO 并延长到 P , 设 l_1 与 AB 交于点 F . \therefore 线段 AB, BC 的垂直平分线 l_1, l_2 相交于点 $O, \therefore AO = OB = OC, AF = BF, CD = BD, \angle BFO = \angle BDO = \angle CDO = 90^\circ, \therefore \angle DOF + \angle ABC = 180^\circ. \therefore \angle OEB = 46^\circ, \therefore \angle 1 = 90^\circ - \angle OEB = 44^\circ$.



$\therefore \angle DOF + \angle 1 = 180^\circ, \therefore \angle ABC = \angle 1 = 44^\circ$.

$\therefore OA = OB, OB = OC,$

$\therefore \angle A = \angle ABO, \angle OBC = \angle C$.

$\therefore \angle AOP = \angle A + \angle ABO, \angle COP = \angle C + \angle OBC,$

$\therefore \angle AOC = \angle AOP + \angle COP = \angle A + \angle ABO + \angle C + \angle CBO = 2 \times 44^\circ = 88^\circ$.

3. 【解】(1) $\because PM$ 和 QN 分别垂直平分 AB 和 $AC, \therefore AP = BP, AQ = CQ,$

$\therefore \triangle APQ$ 的周长为 $AP + PQ + AQ = BP + PQ + CQ = BC$.

$\because \triangle APQ$ 的周长为 12, $\therefore BC = 12$.

(2) $\because PM$ 和 QN 分别垂直平分 AB 和 $AC,$

$\therefore AM = BM, \angle AMP = \angle BMP = 90^\circ$.

$\therefore MP = MP, \therefore \triangle AMP \cong \triangle BMP,$

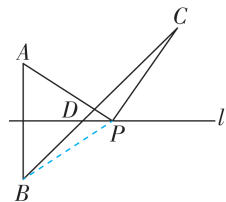
$\therefore \angle B = \angle BAP$, 同理易得 $\angle C = \angle CAQ$.

$\because \angle BAC = 105^\circ, \therefore \angle BAP + \angle CAQ = \angle B + \angle C = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ,$

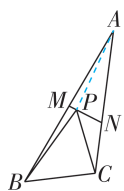
$\therefore \angle PAQ = \angle BAC - (\angle BAP + \angle CAQ) = 105^\circ - 75^\circ = 30^\circ$.

4. C 【解析】根据线段垂直平分线的性质可知, 直线 MN 上会触发警报的点 P 分别为 AB, AC, BC 的垂直平分线与直线 MN 的交点, 共 3 个. 故选 C.

5. B 【解析】如图, 连接 BP . \because 直线 l 是线段 AB 的垂直平分线, $\therefore AP = BP, \therefore AP + PC = BP + PC$. \because 点 P 不与点 D 重合, $\therefore AP + PC = BP + PC > BC$. 故选 B.



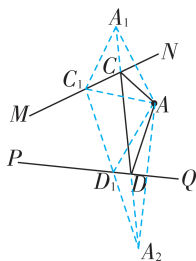
(第 5 题图)



(第 6 题图)

6. C 【解析】连接 AP , 如图. $\because MN$ 为线段 AB 的垂直平分线, P 为 MN 上任意一点, $\therefore PB = PA, \therefore PB + PC = PA + PC$. $\because PA + PC \geq AC, AC = 11, \therefore$ 当点 A, P, C 共线时, $PA + PC$ 的值最小, 为 11, $\therefore PB + PC$ 的最小值为 11. 故选 C.

7. 【解】如图, 作点 A 关于 MN 的对称点 A_1 , 作点 A 关于 PQ 的对称点 A_2 , 连接 A_1A_2 , 分别交 MN, PQ 于点 C, D , 连接 AC, AD . 当 C, D 两点为邮筒的位置时, 邮递员所走路程最短. 邮递员所走的最短路线为 $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ 或 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$.



理由如下: 在 MN 上另任取一点 C_1 , 连接 AC_1 ,

A_1C_1, A_2C_1, A_2C_1 与 PQ 交于点 D_1 , 连接 AD_1 . 则此时邮递员走的路程为 $AC_1 + C_1D_1 + AD_1 = A_1C_1 + A_2C_1 > A_1A_2$. 而 $A_1A_2 = A_1C + CD + A_2D = AC + CD + AD$, 所以 $AC_1 + C_1D_1 + AD_1 > AC + CD + AD$, 即邮递员所走的最短路线为 $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ 或 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$.

课时 2 线段垂直平分线性质的逆定理



刷基础

1. B 【解析】 $\because BC = BD + AD = BD + CD, \therefore AD = CD, \therefore$ 点 D 在线段 AC 的垂直平分线上. 故选 B.

2. A 【解析】 \because 货物中转仓到三地的距离相等, \therefore 货物中转仓的位置应选在 $\triangle ABC$ 三边垂直平分线的交点处, 故选 A.

3. C 【解析】 $\because AB = AD, \therefore$ 点 A 在 BD 的垂直平分线上. $\because BC = CD, \therefore$ 点 C 在 BD 的垂直平分线上, $\therefore AC$ 所在的直线垂直平分 $BD, \therefore AC \perp BD, \therefore S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 90 \times 60 =$

$2\,700 (\text{cm}^2), \therefore$ 制作这个风筝的蒙面需要的材料至少为 $2\,700 \text{ cm}^2$. 故选 C.

4. 23° 【解析】连接 BC . $\because AB = AC, \therefore$ 点 A 在线段 BC 的垂直平分线上. $\because DB = DC, \therefore$ 点 D 在线段 BC 的垂直平分线上, $\therefore AD$ 所在的直线垂直平分线段 BC . \because 点 P 在 AD 上, $\therefore PB =$

PC . 在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ACP$ 中, $\begin{cases} AB = AC, \\ PB = PC, \\ AP = AP, \end{cases} \therefore \triangle ABP \cong \triangle ACP (\text{SSS}), \therefore \angle ACP = \angle ABP = 23^\circ$.

5. 【证明】如图, 连接 PQ . 在 $\triangle BQP$

和 $\triangle CRQ$ 中, $\begin{cases} PB = QC, \\ \angle B = \angle C, \\ QB = RC, \end{cases}$

$\therefore \triangle BQP \cong \triangle CRQ (\text{SAS}),$

$\therefore QP = QR, \therefore$ 点 Q 在 PR 的垂直平分线上.

6. 【解】当 $x = 5$ 时, 点 E 在线段 CD 的垂直平分线上. 当 $x = 5$ 时, $AE = 2 \times 5 = 10 (\text{cm}) = BC$.

$\because AB = 25 \text{ cm}, DA = 15 \text{ cm}, \therefore BE = AB - AE = 15 \text{ cm}, \therefore BE = AD$. 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BEC$ 中,

$\begin{cases} AD = BE, \\ \angle A = \angle B, \\ AE = BC, \end{cases} \therefore \triangle ADE \cong \triangle BEC (\text{SAS}), \therefore DE = EC$. 故当 $x = 5$ 时, 点 E 在线段 CD 的垂直平分线上.

7. (1) 【证明】 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$, 且 $DE \perp AB, DF \perp AC, \therefore \angle EAD = \angle FAD, \angle DEA = \angle DFA = 90^\circ$. 在

$\triangle AED$ 和 $\triangle AFD$ 中, $\begin{cases} \angle DEA = \angle DFA, \\ \angle EAD = \angle FAD, \\ AD = AD, \end{cases}$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle AFD,$

思路分析

利用线段垂直平分线的性质可得 $AP = BP$, 进而可得 $AP + PC = BP + PC$, 再根据三角形三边关系及 P 点位置即可确定结论.

刷有所得

“两线一点”型最短路径问题的解题方法: ①分别作出该点关于这两条直线的对称点; ②连接两个对称点, 这两个对称点的连线与两条直线的交点即为所求的点的位置.

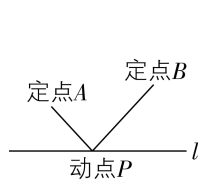
大招专题5 轴对称——将军饮马



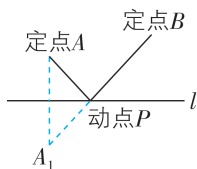
刷难关

大招解读 | 两定一动

条件:如图(1),在直线 l 上找一点 P ,使 $AP+BP$ 的值最小.



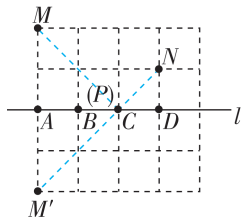
图(1)



图(2)

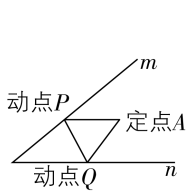
方法:如图(2),作点 A 关于 l 的对称点 A_1 ,连接 A_1B , A_1B 与 l 的交点即为点 P ,此时 $AP+BP$ 的值最小,为 $A_1P+BP=A_1B$.

1. C 【解析】如图,点 M' 是点 M 关于直线 l 的对称点,连接 $M'N$,则 $M'N$ 与直线 l 的交点即为点 P ,连接 PM ,此时 $PM+PN$ 的值最小. 因为 $M'N$ 与直线 l 交于点 C ,所以点 P 应选在 C 点. 故选C.

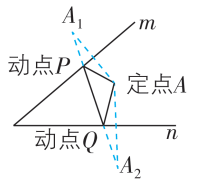


大招解读 | 两动一定(有去有回)

条件:如图(1),点 A 为定点,点 Q 在直线 n 上运动,点 P 在直线 m 上运动,求 $\triangle PAQ$ 周长的最小值.



图(1)



图(2)

方法:如图(2),分别作点 A 关于直线 m,n 的对称点 A_1,A_2 ,连接 A_1A_2 , A_1A_2 与直线 m 的交点即为点 P ,与直线 n 的交点即为点 Q ,此时 $\triangle PAQ$ 的周长有最小值,为 $PA+QA+PQ=PA_1+QA_2+PQ=A_1A_2$.

2. B 【解析】如图,分别作 A 关于直线 BC 和 CD 的对称点 A',A'' ,连接 $A'A''$,交 BC 于 M ,交 CD 于 N ,则易得 $A'A''$ 的长即为 $\triangle AMN$ 周长的最小值. 因为 $\angle DAB=120^\circ$,所以 $\angle A'+\angle A''=180^\circ-\angle DAB=60^\circ$. 因为 $\angle A'=\angle MAA'$, $\angle NAD=\angle A''$,且 $\angle A'+\angle MAA'=\angle AMN$, $\angle NAD+\angle A''=\angle ANM$,所以 $\angle AMN+\angle ANM=\angle A'+\angle MAA'+\angle NAD+\angle A''=\angle A'+\angle A''=60^\circ$. 故答案为B.

$\therefore AE=AF, DE=DF, \therefore AD$ 垂直平分 EF .

(2) 【解】 $\because \triangle AED \cong \triangle AFD, DE=3, \therefore DF=DE=3. \therefore AB+AC=10, S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB \cdot DE+\frac{1}{2}AC \cdot DF=\frac{1}{2}(AB+AC) \cdot DE=15$.

课时3 用尺规作线段的垂直平分线



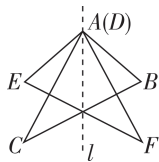
刷基础

1. C 【解析】要使 $PA=PB$,则 P 在 AB 的垂直平分线上,作图方法正确的是C选项. 故选C.

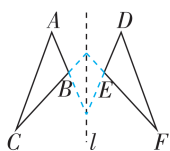
2. $>$ 【解析】由题意得 $a>\frac{1}{2}AB. \because AB=4\text{ cm}, \therefore a>2\text{ cm}$,故答案为 $>$.

3. 19 【解析】由题意可得, MN 垂直平分 $BC, \therefore DB=DC. \therefore \triangle ABD$ 的周长是 $AB+BD+AD=AB+DC+AD=AB+AC, AB=7, AC=12, \therefore AB+AC=19, \therefore \triangle ABD$ 的周长是 19. 故答案为 19.

4. 【解】如图(1)、图(2),直线 l 就是所求作的对称轴.

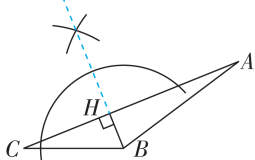


图(1)

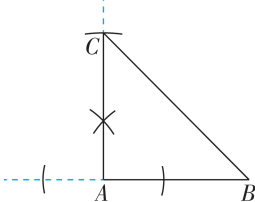


图(2)

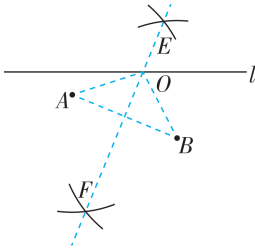
5. 【解】如图,线段 BH 即为所求.



6. 【解】如图, $\triangle ABC$ 即为所求.



7. 【解】(1)如图,点 O 即为所求.



(2) \because 点 O 在 l 上,且 $OA=OB, \therefore$ 点 O 为直线 l 与 AB 的垂直平分线的交点,故答案为到线段两端距离相等的点在这条线段的垂直平分线上.

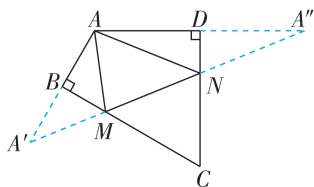
思路分析

首先得到点 M 关于直线 l 的对称点 M' ,连接 $M'N$, $M'N$ 与直线 l 的交点即为点 P .

思路分析

要使 $\triangle AMN$ 的周长最小,考虑利用点的对称,使三角形的三边在同一直线上. 分别作出 A 关于直线 BC 和 CD 的对称点 A',A'' ,连接 $A'A''$,交 BC 于 M ,交 CD 于 N ,则 $A'A''$ 即为 $\triangle AMN$ 周长的最小值. 结合三角形外角的性质得到 $\angle AMN+\angle ANM=2(\angle A'+\angle A'')$,由此分析即可得出答案.

$\angle NAD + \angle A'' = 2(\angle A' + \angle A'') = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$.
故选 B.

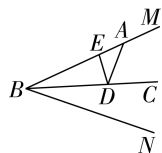


大招解读 | 两动一定 (有去无回)

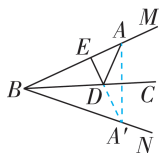
条件:如图(1), BC 是 $\angle MBN$ 的平分线, 点 A 是 BM 上的一个定点, 点 E, D 分别为 BA, BC 上的两个动点, 求 $DA + DE$ 的最小值.

方法 1:如图(2), 找点 A 关于 BC 的对称点 A' , 实现化“折”为“直”. 过点 A' 作 $A'E \perp AB$ 于点 E , 交 BC 于点 D , 则 $A'E$ 的长即为 $DA + DE$ 的最小值;

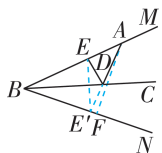
方法 2:如图(3), 作点 E 关于 BC 的对称点 E' , 连接 AE' , 交 BC 于点 D , 过点 A 作 $AF \perp BN$ 于点 F . 由轴对称的性质易得 $DA + DE = AE'$. 因为 BC 是 $\angle MBN$ 的平分线, 所以易知点 E' 在 BN 上, 所以 $AE' \geq AF$, 所以 $DA + DE$ 的最小值为 AF 的长.



图(1)



图(2)



图(3)

3. 24 【解析】

作 E 关于 AD 的对称点 E' , 过 E' 作 $E'F \perp AB$ 于 F , 交 AD 于 P , 如

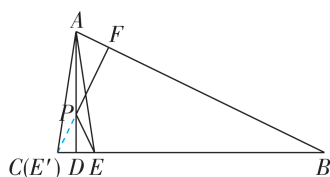


图. 因为 $AC = AE$, 所以点 A 在 CE 的垂直平分线上. 又 AD 垂直 CE , 所以 AD 为 CE 的垂直平分线, 所以点 E' 与点 C 重合, 所以 $PE + PF$ 的最小值即为 $PE' + PF = CF$, 所以 $CF = 6$. 由

三角形的面积公式可知 $\frac{1}{2} \times AB \times CF = \frac{1}{2} \times BC \times$

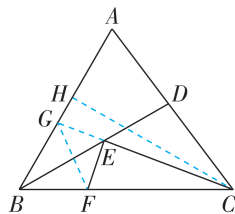
$$AD = \frac{1}{2} \times 18 \times 8, \text{ 故 } AB = \frac{8 \times 18}{6} = 24.$$

4. B 【解析】

如图, 作点 F 关于直线 BD 的对称点 G , 连接 CG , 交 BD 于 E , 作 $CH \perp AB$ 于 H . 由轴对称的性质易得 $CE + EF = CG$. 因为 BD 平分 $\angle ABC$, 所以易知点 G 在 AB 上, 所以 $CG \geq CH$, 所以 $CE + EF$ 的最小值为 CH 的长.

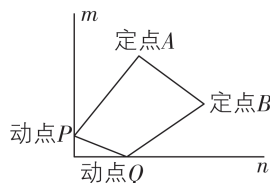
因为 $\frac{1}{2} AB \cdot CH = 18$, 所以 $\frac{1}{2} \times 6 \cdot CH = 18$, 所以

以 $CH = 6$, 所以 $CE + EF$ 的最小值为 6. 故选 B.



大招解读 | 两定两动

条件:如图, 点 A, B 为定点, 点 Q 在直线 n 上运动, 点 P 在直线 m 上运动, 求四边形 $APQB$ 周长的最小值.



方法:作点 A 关于直线 m 的对称点 A_1 , 作点 B 关于直线 n 的对称点 B_1 , 连接 A_1B_1 , A_1B_1 与直线 m 的交点即为点 P , 与直线 n 的交点即为点 Q , 此时四边形 $APQB$ 的周长最小, 最小为 $AB + AP + PQ + BQ = AB + A_1P + PQ + B_1Q = AB + A_1B_1$.

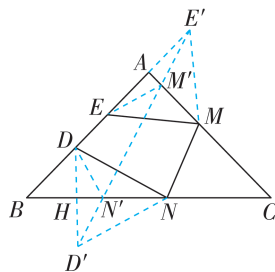
关键点拨

能用一条线段表示出三条线段的和的最小值, 并确定值最小时点 M, N 的位置是解题的关键.

关键点拨

作点 F 关于直线 BD 的对称点 G , 连接 CG , 交 BD 于 E , 作 $CH \perp AB$ 于 H , 可得出 $CE + EF = CG \geq CH$, 进一步利用面积公式求解即可.

5. B 【解析】如图, 作点 D 关于直线 BC 的对称点 D' , 作点 E 关于直线 AC 的对称点 E' , 连接 $D'E'$ 分别交 AC, BC 于点 M', N' , 连接 ME', ND', EM', DN' . 由轴对称的性质可得 $ME = ME', ND = ND'$, 所以四边形 $DEM N$ 的周长为 $DE + ME + MN + ND = DE + ME' + MN + ND' \geq DE + D'E'$. 因为 DE 的长固定, 所以当点 M 与点 M' 重合, 点 N 与点 N' 重合时, 四边形 $DEM N$ 的周长最小, 此时 $\angle DNM + \angle EMN = \angle DN'M' + \angle EM'N'$. 由对称性及三角形内角和定理的推论可知 $\angle DN'M' = \angle N'DD' + \angle N'D'D = 2\angle N'D'D$, $\angle EM'N' = \angle M'EE' + \angle M'E'E = 2\angle M'E'E$, 所以 $\angle DN'M' + \angle EM'N' = 2\angle N'D'D + 2\angle M'E'E = 2(180^\circ - \angle D'DE')$. 设 DD' 与 BC 交于点 H . 因为 $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, 所以易得 $\angle BDH = 45^\circ$, 所以 $\angle D'DE' = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, 所以 $\angle DN'M' + \angle EM'N' = 2(180^\circ - 135^\circ) = 90^\circ$, 即当四边形 $DEM N$ 的周长最小时, $\angle DNM + \angle EMN$ 的度数是 90° , 故选 B.



大招解读 | 线段差最值问题

1. 在直线 l 上找一点 P , 使 $|PA-PB|$ 最小.

同侧:		因为绝对值的最小值为 0, 所以当 $PA = PB$ 时, $ PA-PB $ 的值最小, 所以作线段 AB 的垂直平分线交 l 于点 P , 此时 $PA = PB$.
异侧:		

2. 在直线 l 上找一点 P , 使 $|PA-PB|$ 最大.

同侧:		因为 $ PA-PB \leq AB$ (三点不共线时, 三角形两边之差小于第三边), 所以当 A, B, P 三点共线时, $ PA-PB $ 的值最大.
异侧:		作点 B 关于 l 的对称点 B_1 , 连接 AB_1 并延长交 l 于点 P . 此时, $ PA-PB $ 的值最大, 为 AB_1 的长.

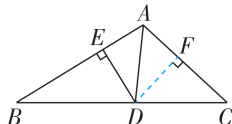
6.5 【解析】如图, 延长 AB 交 MN 于点 P' . 因为 $P'A - P'B = AB$, $AB \geq |PA - PB|$, 所以当点 P 运动到点 P' 的位置时, $|PA - PB|$ 的值最大. 因为 $AB = 5$, 所以 $|PA - PB|$ 的最大值为 5. 故答案为 5.

16.3 角的平分线

刷基础

1.D 【解析】 $\because \angle BAC = 90^\circ, DE \perp BC, BD$ 平分 $\angle ABC, \therefore \angle ABD = \angle EBD, AD = DE$. 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EBD$ 中, $\begin{cases} \angle A = \angle BED, \\ \angle ABD = \angle EBD, \\ BD = BD, \end{cases} \therefore \triangle ABD \cong \triangle EBD$ (AAS), $\therefore AB = BE$. $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle CDE$ 的周长分别为 13 和 3, $\therefore AB + BC + AC = AB + AC + BE + EC = 13, DE + EC + DC = AD + EC + DC = AC + EC = 3, \therefore AB + BE = 10, \therefore AB = BE = 5$. 故选 D.

2.A 【解析】如图, 过点 D 作 $DF \perp AC$ 于 F . $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,



思路分析

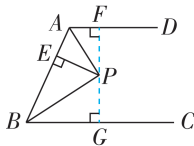
延长 AB 交 MN 于点 P' , 此时 $P'A - P'B = AB$. 由三角形三边关系可知 $AB > |PA - PB|$, 故当点 P 运动到点 P' 时 $|PA - PB|$ 最大.

关键点拨

证明 DE 是 $\angle ADC$ 的平分线的关键是作出 $EG \perp AD, EH \perp BC$.

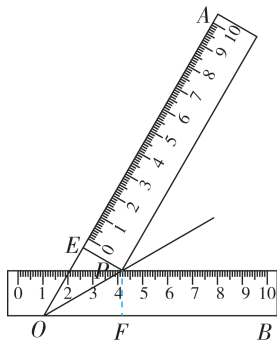
$DE \perp AB, \therefore DE = DF = 2, \therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}AB \cdot DE + \frac{1}{2}AC \cdot DF = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 + \frac{1}{2}AC \times 2 = 7$, 解得 $AC = 3$.

3.6 【解析】如图, 过点 P 作 $PF \perp AD$ 于 F , 作 $PG \perp BC$ 于 G . $\because AD \parallel BC, \therefore$ 易知 F, P, G 在一条直线上. $\because AP$ 是 $\angle BAD$ 的平分线, $PE \perp AB, \therefore PF = PE$, 同理可得 $PG = PE, \therefore$ 点 P 到 AD 与 BC 的距离之和为 $3 + 3 = 6$, 故答案为 6.



4. 【解】由题意得, $DE = CD = 2. \therefore DE = \frac{3}{4}BD, \therefore BD = \frac{4}{3}DE = \frac{4}{3} \times 2 = \frac{8}{3}, \therefore BC = BD + CD = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}. \therefore AC = \frac{3}{4}BC, \therefore AC = \frac{3}{4} \times \frac{14}{3} = \frac{7}{2}$.

5. 角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上 【解析】如图, 作 $PF \perp BO$, 垂足为 F . 由题意可知 $PE \perp OA$.

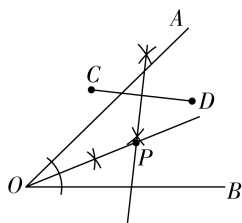


\therefore 两把长方形直尺完全相同, $\therefore PE = PF, \therefore OP$ 平分 $\angle AOB$. 其依据是角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上.

6. 【证明】过点 E 作 $EG \perp AD$ 于 $G, EH \perp BC$ 于 $H. \because EF \perp AB, \angle AEF = 50^\circ, \therefore \angle FAE = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ. \therefore \angle BAD = 100^\circ, \therefore \angle CAD = 180^\circ - 100^\circ - 40^\circ = 40^\circ, \therefore \angle FAE = \angle CAD = 40^\circ$, 即 AC 为 $\angle DAF$ 的平分线. 又 $\because EF \perp AB, EG \perp AD, \therefore EF = EG. \therefore BE$ 是 $\angle ABC$ 的平分线, $EF \perp AB, EH \perp BC, \therefore EF = EH, \therefore EG = EH, \therefore DE$ 平分 $\angle ADC$.

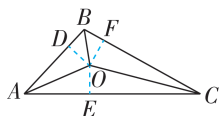
7.D 【解析】题图中, 第一个图为尺规作角平分线的方法, OP 为 $\angle AOB$ 的平分线. 第二个图, 由作图可知 $OC = OD, OA = OB, \therefore AC = BD. \therefore \angle AOD = \angle BOC, \therefore \triangle AOD \cong \triangle BOC, \therefore \angle OAD = \angle OBC. \therefore BD = AC, \angle BPD = \angle APC, \therefore \triangle BPD \cong \triangle APC, \therefore AP = BP$. 又 $\because OA = OB, OP = OP, \therefore \triangle AOP \cong \triangle BOP, \therefore \angle AOP = \angle BOP, \therefore OP$ 为 $\angle AOB$ 的平分线. 第三个图, 由作图痕迹得知 $OA = OB$, 作 OA, OB 的垂直平分线, $\therefore OP = AP = BP, \therefore \triangle OAP \cong \triangle OBP$ (SSS), $\therefore \angle AOP = \angle BOP, \therefore$ 射线 OP 为 $\angle AOB$ 的平分线. 第四个图, 由作图可知 $OP \perp CD$, 即 $\angle OPD = \angle OPC = 90^\circ, PD = PC$. 又 $\because OP = OP, \therefore \triangle ODP \cong \triangle OCP, \therefore \angle COP = \angle DOP, \therefore OP$ 为 $\angle AOB$ 的平分线. 故选 D.

8. 【解】如图,点P即为所求.

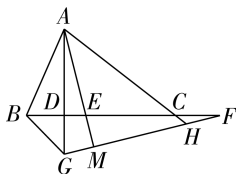


刷提升

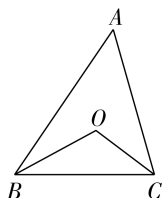
1. C 【解析】如图,过点O作 $OD \perp AB$,垂足为D, $OE \perp AC$,垂足为E, $OF \perp BC$,垂足为F. $\because \triangle ABC$ 的三条角平分线交于点O, $\therefore OD = OE = OF$. $\because AB = 10, BC = 15, AC = 20, \therefore S_{\triangle ABO} : S_{\triangle BCO} : S_{\triangle CAO} = AB : BC : AC = 10 : 15 : 20 = 2 : 3 : 4$. 故选C.



2. D 【解析】如图,设AE交GF于M. $\because AD \perp BC, FG \perp AE, \therefore \angle ADE = \angle AMF = 90^\circ. \therefore \angle AED = \angle MEF, \therefore \angle DAE = \angle F$,故①正确. $\because AE$ 平分 $\angle BAC$ 交BC于E, $\therefore \angle EAC = \frac{1}{2} \angle BAC, \therefore \angle DAE = 90^\circ - \angle AED = 90^\circ - (\angle ACE + \angle EAC) = 90^\circ - (\angle ACE + \frac{1}{2} \angle BAC) = \frac{1}{2} (180^\circ - 2 \angle ACE - \angle BAC) = \frac{1}{2} (\angle ABD - \angle ACE)$,即 $2 \angle DAE = \angle ABD - \angle ACE$,故②正确. $\because AE$ 平分 $\angle BAC$ 交BC于E, \therefore 点E到AB和AC的距离相等, $\therefore S_{\triangle AEB} : S_{\triangle AEC} = AB : CA$,故③正确. $\because \angle DAE = \angle F, \angle AMG = \angle FME = 90^\circ, \therefore \angle AGH = \angle MEF. \therefore \angle MEF = \angle CAE + \angle ACB, \therefore \angle AGH = \angle CAE + \angle ACB, \therefore \angle AGH = \angle BAE + \angle ACB$,故④正确. 故选D.



3. 115° 【解析】如图所示. \because 点O是 $\triangle ABC$ 内一点,且点O到三边AB,BC,CA的距离相等, \therefore 点O是 $\triangle ABC$ 的三个内角的平分线的交点, $\therefore \angle OBC = \frac{1}{2} \angle ABC, \angle OCB = \frac{1}{2} \angle ACB. \therefore \angle A = 50^\circ, \therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A = 130^\circ, \therefore \angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2} (\angle ABC +$

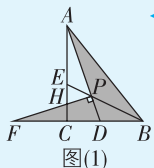


刷有所得

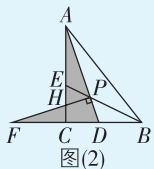
到两点距离相等的点,一定在这两点所连线段的垂直平分线上,到角两边距离相等的点在这个角的平分线上,若要两者同时具备,则找这两条线的交点.

思路分析

(2)由(1)的结论,结合BP为角平分线,易于发现对称型的全等三角形,如图(1)中阴影.



从结论 $AH + BD = AB$,结合 $BF = AB$,需证 $AH = DF$,找旋转型的全等三角形,如图(2)中阴影.

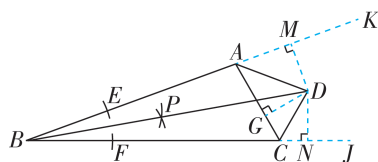


关键点拨

利用角平分线的性质定理的逆定理,由“点O到AB,BC,CA的距离相等”,得到点O是 $\triangle ABC$ 的三个内角的平分线的交点是解题的关键.

$\angle ACB) = 65^\circ, \therefore \angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$. 故答案为 115° .

4. 40° 【解析】延长BC到J,延长BA到K,过点D作 $DM \perp BK$ 于点M, $DN \perp BJ$ 于点N, $DG \perp AC$ 于点G,如图.由作图可知BD平分 $\angle ABC, DM \perp BK, DN \perp BJ, \therefore \angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC = 10^\circ, DM = DN$.在 $\triangle BCD$ 中, $\angle DCJ = \angle BDC + \angle DBC = 50^\circ + 10^\circ = 60^\circ$.在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 180^\circ - 100^\circ - 20^\circ = 60^\circ, \therefore \angle ACD = 180^\circ - \angle ACB - \angle DCJ = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ, \therefore \angle ACD = \angle DCJ. \therefore DN \perp CJ, DG \perp CA, \therefore DG = DN, \therefore DG = DM, \therefore AD$ 平分 $\angle CAK. \therefore \angle CAK = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ, \therefore \angle CAD = \frac{1}{2} \angle CAK = 40^\circ$. 故答案为 40° .



5. (1) 【解】 $\because \angle ACB = 90^\circ, \therefore \angle CAB + \angle CBA = 90^\circ. \therefore \triangle ABC$ 的角平分线AD,BE相交于点P, $\therefore \angle PAB = \frac{1}{2} \angle CAB, \angle PBA = \frac{1}{2} \angle CBA, \therefore \angle PAB + \angle PBA = \frac{1}{2} (\angle CAB + \angle CBA) = 45^\circ, \therefore \angle APB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. 故答案为 135° . (2) 【证明】 $\because \angle APB = 135^\circ, \therefore \angle BPD = 45^\circ. \therefore PF \perp AD, \therefore \angle BPF = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ = \angle APB. \therefore BP$ 平分 $\angle ABC, \therefore \angle ABP = \angle FBP$.

在 $\triangle APB$ 和 $\triangle FPB$ 中, $\begin{cases} \angle ABP = \angle FBP, \\ BP = BP, \\ \angle APB = \angle FPB, \end{cases}$

$\therefore \triangle APB \cong \triangle FPB (ASA), \therefore \angle F = \angle BAP, AP = FP, AB = FB. \therefore AP$ 平分 $\angle BAC, \therefore \angle BAP = \angle CAP, \therefore \angle F = \angle CAP. \therefore PF \perp AD, \therefore \angle APH = \angle FPD$.

在 $\triangle APH$ 和 $\triangle FPD$ 中, $\begin{cases} \angle APH = \angle FPD, \\ AP = FP, \\ \angle CAP = \angle F, \end{cases}$

$\therefore \triangle APH \cong \triangle FPD (ASA), \therefore AH = FD,$
 $\therefore AH + BD = FD + BD = BF = AB.$

刷素养

6. (1)【解】 $\because AM \parallel BN,$

$\therefore \angle BAM + \angle ABN = 180^\circ.$

$\because AE$ 平分 $\angle BAM, BE$ 平分 $\angle ABN,$

$\therefore \angle BAE = \frac{1}{2} \angle BAM, \angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABN,$

$\therefore \angle BAE + \angle ABE = \frac{1}{2} (\angle BAM + \angle ABN) = 90^\circ,$

$\therefore \angle AEB = 180^\circ - \angle BAE - \angle ABE = 90^\circ.$

(2)【证明】如图(1), 在 AB 上截取 $AF = AC,$ 连接 $EF.$

$\because AE$ 平分 $\angle BAM, \therefore \angle CAE = \angle FAE.$

在 $\triangle ACE$ 与 $\triangle AFE$ 中, $\begin{cases} AC = AF, \\ \angle CAE = \angle FAE, \\ AE = AE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle AFE (SAS),$

$\therefore \angle AEC = \angle AEF.$

$\because \angle AEB = 90^\circ,$

$\therefore \angle AEF + \angle BEF = \angle AEC + \angle BED = 90^\circ,$

$\therefore \angle FEB = \angle DEB.$

$\because BE$ 平分 $\angle ABN, \therefore \angle FBE = \angle DBE.$

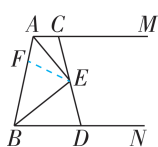
在 $\triangle BFE$ 与 $\triangle BDE$ 中, $\begin{cases} \angle FBE = \angle DBE, \\ BE = BE, \\ \angle FEB = \angle DEB, \end{cases}$

$\therefore \triangle BFE \cong \triangle BDE (ASA),$

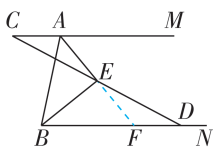
$\therefore BF = BD.$

$\because AB = AF + BF,$

$\therefore AC + BD = AB.$



图(1)



图(2)

(3)【解】如图(2), 延长 AE 交 BD 于点 $F.$

$\because \angle AEB = 90^\circ, \therefore BE \perp AF.$

$\because BE$ 平分 $\angle ABN, \therefore \angle ABE = \angle FBE.$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FBE$ 中, $\begin{cases} \angle AEB = \angle FEB, \\ BE = BE, \\ \angle ABE = \angle FBE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FBE (ASA),$

$\therefore AB = BF = 5, AE = EF.$

$\because AM \parallel BN, \therefore \angle C = \angle EDF.$

在 $\triangle ACE$ 与 $\triangle FDE$ 中, $\begin{cases} \angle C = \angle EDF, \\ \angle AEC = \angle FED, \\ AE = FE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle FDE (AAS), \therefore DF = AC = 3.$

设 $S_{\triangle BEF} = S_{\triangle ABE} = 5x,$ 则 $S_{\triangle DEF} = S_{\triangle ACE} = 3x.$

$\therefore S_{\triangle ABE} - S_{\triangle ACE} = 2, \therefore 5x - 3x = 2,$

$\therefore x = 1, \therefore S_{\triangle BDE} = S_{\triangle BEF} + S_{\triangle DEF} = 8.$

大招专题6 角平分线中常见辅助线



刷难关

大招解读 | 角平分线+垂直一边

如图, OP 是 $\angle MON$ 的

平分线, $PA \perp OM$ 于 $A,$

可以过点 P 作 $PB \perp ON$

于 $B,$ 则 $PB = PA,$ 可记为

“图中有角平分线, 可向

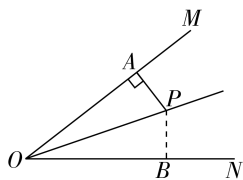
两边作垂线, 垂线段相等”, 再利用角平分线的

性质定理, 即可得到一组全等三角形 ($\triangle AOP \cong$

$\triangle BOP$). 一般题目条件会给出一条垂线, 需要

自行补出另一条垂线, 但有时题目条件只给出

一条角平分线, 需要自行补出两条垂线.



1.【解】如图, 作 $DF \perp BC$ 交 BC 的延长线于 $F.$

因为 BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, $DE \perp AB,$

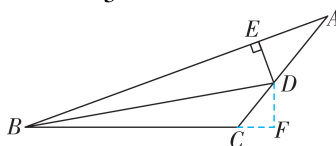
所以 $DE = DF.$

因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $36 \text{ cm}^2,$

所以 $\frac{1}{2} BC \cdot DF + \frac{1}{2} AB \cdot DE = 36.$

因为 $AB = 18 \text{ cm}, BC = 12 \text{ cm},$

所以 $DE = DF = \frac{12}{5} \text{ cm}.$



关键点拨

因为角平分线上的点到角的两边的距离相等, 所以 $\triangle ABD$ 的边 AB 上的高和 $\triangle ADC$ 的边 AC 上的高相等.

2.【解】如图, 过点 D 作 $DF \perp$

$AB, DG \perp AC,$ 垂足分别为 $F,$

$G.$ 因为 AD 是角平分线, 所以

$DF = DG.$ 设 $DF = DG = h.$ 因为

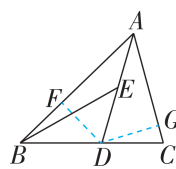
$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC},$ 所以 $16 =$

$\frac{1}{2} AB \cdot DF + \frac{1}{2} AC \cdot DG,$ 所以

$5h + 3h = 32,$ 解得 $h = 4,$ 所以 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 =$

10. 因为 BE 是 $\triangle ABD$ 的中线, 所以 $S_{\triangle ABE} =$

$\frac{1}{2} S_{\triangle ABD} = 5.$



思路分析

在 AC 上取一点 $F,$ 使 $AF = AB,$ 连接 $PF,$ 证明 $\triangle ABP \cong \triangle AFP (SAS),$ 得到 $PB = PF,$ 再根据题意求解即可.

大招解读 | 角平分线+斜线

如图, OP 是 $\angle MON$ 的平分

线, 点 A 是射线 OM 上任意

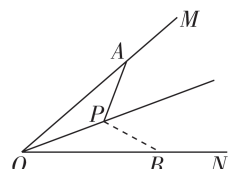
一点, 线段 AP 与 OM 和 OP

均不垂直, 则可在 ON 上截

取 $OB = OA,$ 连接 $PB,$ 构造

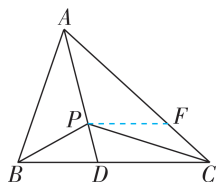
$\triangle OPB \cong \triangle OPA.$ 可记为“图中有角平分线, 截长

补短造全等”.



3.【解】 $PC - PB < AC - AB.$ 理由如下: 如图, 在 AC

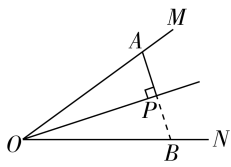
上取一点 F , 使 $AF=AB$, 连接 PF .



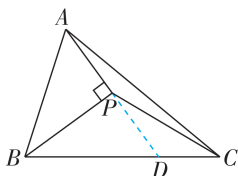
因为 AD 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线, 所以 $\angle BAP = \angle FAP$. 在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle AFP$ 中, $\begin{cases} AB=AF, \\ \angle BAP=\angle FAP, \\ AP=AP, \end{cases}$ 所以 $\triangle ABP \cong \triangle AFP$ (SAS), 所以 $PB=PF$. 因为 $AF=AB=AC-CF$, 所以 $CF=AC-AB$. 因为 $PC-PF < CF$, 所以 $PC-PB < AC-AB$.

大招解读 | 角平分线+垂线

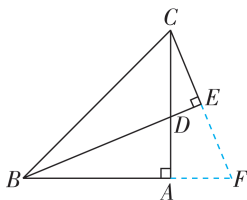
如图, P 是 $\angle MON$ 的平分线上一点, $AP \perp OP$ 于 P , 延长 AP 交 ON 于 B , 构造一组全等三角形 $\triangle AOP \cong \triangle BOP$.



4. **A** 【解析】如图, 延长 AP 交 BC 于点 D . 因为 BP 是 $\angle ABC$ 的平分线, 所以 $\angle ABP = \angle DBP$. 因为 $AP \perp BP$, 所以 $\angle APB = \angle DPB = 90^\circ$. 因为 $BP=BP$, 所以 $\triangle BAP \cong \triangle BDP$ (ASA), 所以 $AP=DP$, $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle BDP}$, 所以 $S_{\triangle APC} = S_{\triangle DPC}$. 因为 $S_{\triangle BPC} = 10 \text{ cm}^2$, 所以 $S_{\triangle BPD} + S_{\triangle DPC} = 10 \text{ cm}^2$, 所以 $S_{\triangle ABP} + S_{\triangle APC} = 10 \text{ cm}^2$, 所以 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BPD} + S_{\triangle DPC} + S_{\triangle ABP} + S_{\triangle APC} = 20 \text{ cm}^2$. 故选 A.



5. 【证明】如图, 延长 CE 与 BA 相交于点 F . 因为 $\angle BAC = \angle BEF = 90^\circ$, 所以 $\angle EBF + \angle F = 90^\circ$, $\angle ACF + \angle F = 90^\circ$, 所以 $\angle EBF = \angle ACF$.



在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACF$ 中, $\begin{cases} \angle ABD = \angle ACF, \\ AB=AC, \\ \angle BAC = \angle CAF, \end{cases}$ 所以 $\triangle ABD \cong \triangle ACF$ (ASA), 所以 $BD=CF$. 因为 BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, 所以 $\angle EBC = \angle EBF$. 在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle BFE$ 中, $\begin{cases} \angle EBC = \angle EBF, \\ BE=BE, \\ \angle CEB = \angle FEB, \end{cases}$ 所以 $\triangle BCE \cong \triangle BFE$ (ASA), 所以 $CE=EF$, 所以 $CF=2CE$, 所以 $BD=CF=2CE$.

刷有所得

判断一个图形是不是中心对称图形, 关键是看能否找到一点, 使这个图形绕该点旋转 180° 后与原图形重合. 具体判断时, 可看各对应点连线是否能同时被某一点平分. 如果能平分, 这个图形即为中心对称图形, 且这个点为图形的对称中心.

思路分析

延长 AP 交 BC 于点 D . 根据已知条件证明 $\triangle BAP \cong \triangle BDP$, 从而证出 $AP=PD$, $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle DBP}$, 再根据等底同高的两个三角形面积相等, 得到 $S_{\triangle APC} = S_{\triangle DPC}$, 最后根据 $S_{\triangle BPC} = 10 \text{ cm}^2$, 求出答案即可.

刷有所得

在判定三角形全等时, 关键是选择恰当的判定条件, 要注意三角形间的公共边和公共角, 必要时添加适当辅助线构造全等三角形.

16.4 中心对称



刷基础

1. **D** 【解析】选项 A、B、C 中的图形不是中心对称图形, 故 A、B、C 不符合题意; D 选项中的图形是中心对称图形, 故 D 符合题意.

2. **C** 【解析】连接 AD, CF, BE , 三条线段相交于点 M , \therefore 点 M 是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的对称中心, 故选 C.

3. **D** 【解析】由题图可知将等边三角形放在④处可得中心对称图形. 故选 D.

4. **C** 【解析】根据成中心对称的概念, 知②③④都成中心对称. 故选 C.

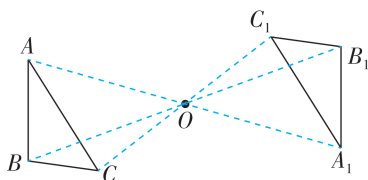
技巧总结 欲分析两个图形是否成中心对称, 只要把一个图形绕一个点旋转 180° , 观察是否能和另一个图形重合即可.

5. **B** 【解析】观察图形可知, 点 A 与点 D 是对应点, $\angle ACB = \angle DFE$, $BO=EO$, $AO=DO$. $\therefore \angle AOB = \angle DOE$, $\therefore \triangle AOB \cong \triangle DOE$, $\therefore \angle ABO = \angle DEO$, $\therefore AB \parallel DE$. 故选 B.

6. **C** 【解析】如题图 (2), 直线 m 经过两个长方形的对角线的交点, 所以直线两旁的图形的面积都是两个长方形面积之和的一半, 所以这条直线把这个图形分成了面积相等的两部分, 即甲的作法正确; 如题图 (3), 将图形添补后, 直线 m 经过大长方形和图形外添补的小长方形的对角线的交点, 直线两旁未添补的图形的面积都是大长方形面积的一半减去添补的小长方形面积的一半, 所以这条直线把这个图形分成了面积相等的两部分, 即乙的作法正确.

7. **D** 【解析】 $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle CDA$ 关于点 O 成中心对称, \therefore 四边形 $ABCD$ 是中心对称图形, 点 O 是四边形 $ABCD$ 的对称中心, 则①点 E 和点 F , 点 B 和点 D 都是关于 O 的对称点, 正确; ②直线 BD 必经过点 O , 正确; ③四边形 $ABCD$ 是中心对称图形, 正确; ④易知四边形 $DEOC$ 与四边形 $BFOA$ 成中心对称, \therefore 四边形 $DEOC$ 与四边形 $BFOA$ 的面积必相等, 正确; ⑤ $\triangle AOE$ 与 $\triangle COF$ 成中心对称, 正确. 故正确的个数为 5.

8. 【解】如图所示, $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.



16.5 利用图形的平移、旋转

和轴对称设计图案

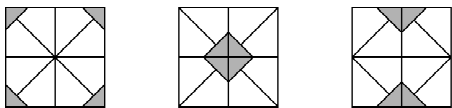
刷基础

1. **C** 【解析】题图(2)的图案可由题图(1)的图案通过旋转变换得到. 题图(2)的图案也可由题图(1)的图案通过轴对称变换得到, 题图(2)的图案中间两条线段所在的两条直线是对称轴. \therefore 题图(2)的图案可由题图(1)的图案通过旋转和轴对称变换得到, 但不能由平移得到, 故选 C.

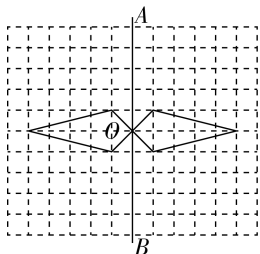
2. **C** 【解析】每一个图案都可以由一个“基本图案”通过连续旋转相同的角度得到, 就是这个图形可以被经过中心的射线平分成几个全等的部分. 观察题图可知每一个图案都可以被经过中心的射线平分成 6 个全等的部分, 则旋转的角度是 60° .

3. ①④ ③ ②

4. 【解】答案不唯一, 例如:



5. 【解】(1) 如图所示.



(2) 略, 答案不唯一.

6. 【解】(1)(2) 答案不唯一, 符合要求即可.

全章综合训练

刷中考

1. **B** 【解析】A 选项, 既不是轴对称图形也不是中心对称图形, 故本选项不符合题意; B 选项, 既是轴对称图形又是中心对称图形, 故本选项符合题意; C 选项, 是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故本选项不符合题意; D 选项, 不是轴对称图形, 是中心对称图形, 故本选项不符合题意. 故选 B.

2. **C** 【解析】 $\because DE$ 垂直平分 AB 交 BC 于点 D , $\therefore AD = DB$. $\therefore \triangle ACD$ 的周长为 50 cm , $\therefore AC +$

关键点拨

由作图痕迹判断出 BE 为 $\angle ABC$ 的平分线, DF 为线段 AB 的垂直平分线是解决此题的关键.

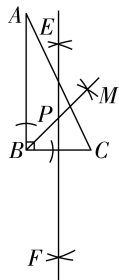
$$AD + CD = AC + CD + DB = AC + BC = 50 \text{ cm}.$$

3. **B** 【解析】由题图中尺规作图痕迹可知, BE 为 $\angle ABC$ 的平分线, DF 为线段 AB 的垂直平分线. 由线段的垂直平分线的性质可得 $AF = BF$, 故 A 选项不符合题意. $\because DF$ 为线段 AB 的垂直平分线, $\therefore \angle BDF = 90^\circ$, $\therefore \angle DBF + \angle DFB = 90^\circ$, 故 C 选项不符合题意. $\because BE$ 为 $\angle ABC$ 的平分线, $\therefore \angle ABF = \angle EBC$. $\because AF = BF$, $\therefore \angle ABF = \angle BAF$, $\therefore \angle BAF = \angle EBC$, 故 D 选项不符合题意. 根据已知条件不能得出 $AE = \frac{1}{2}AC$, 故 B 选项符合题意. 故选 B.

4. **6** 【解析】由作图可知 BP 平分 $\angle ABC$. $\because AD$ 是边 BC 上的高, $MN \perp AB$, $MN = 2$, $\therefore MD = MN = 2$. $\because AD = 4MD$, $\therefore AD = 8$, $\therefore AM = AD - MD = 6$, 故答案为 6.

5. **15** 【解析】 $\because OM \perp AB$, $ON \perp BC$, 且 $OM = ON$, $\therefore BO$ 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle OBM = \angle OBN$. $\because \angle ABC = 30^\circ$, $\therefore \angle ABO = 15^\circ$.

6. 【解】如图, ①先作出线段 BC 的垂直平分线 EF ;



②再作出 $\angle ABC$ 的平分线 BM , EF 与 BM 的交点为 P .

则 P 即为所求作的点.

7. **B** 【解析】由平移定义得, 平移只改变图形的位置, 观察图形可知, 选项 B 中图形能由图形 a 通过平移得到, 选项 A, C, D 中图形均不能由图形 a 通过平移得到, 故选 B.

8. **B** 【解析】观察图形可知, 能拼接成不同轴对称图形的个数为 3. 故选 B.

